GROUPE A — DEUXIEME EPREUVE

On désigne par (x, y) le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbf{R}^n$; par $|x| = (x, x)^{1/2}$ la norme du vecteur x.

Si E est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}$ on note $\|E\| = \inf_{x \in E} |x|$.

Une multi-application A de $\mathbf{R}^n$ est une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathfrak{P}(\mathbf{R}^n)$, ensemble des parties de $\mathbf{R}^n$. Le domaine de A est l'ensemble $D(A) = \{ x, Ax \neq \varnothing \}$, l'image de A est l'ensemble $R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax$.

Si T est une application de D(T), $D(T) \subset \mathbf{R}^n$, dans $\mathbf{R}^n$, elle sera identifiée avec la multi-application définie par

$$Tx = \{Tx\} \quad \text{si } x \in D(T) \quad , \quad Tx = \varnothing \quad \text{si } x \notin D(T) \quad .$$

On désigne par I l'application identique de $\mathbf{R}^n$; une application T de $\mathbf{R}^n$ est une contraction si $|Tx - Ty| \leqslant |x - y|$ quels que soient x et y éléments de D(T).

Une multi-application A est monotone si $(u - v, x - y) \geqslant 0$ quels que soient x, y, u, v vérifiant $u \in Ax$, $v \in Ay$.

I

1° Montrer que si A est une multi-application monotone, il en est de même pour les multi-applications A^{-1}; λA (λ réel positif); $\overline{A}$ définies par

$$A^{-1} x = \{ y, \ x \in Ay \},$$
$$(\lambda A)\, x = \{ \lambda u, \ u \in Ax \},$$
$$\overline{A}x = \overline{Ax} \quad (\overline{Ax} \text{ fermeture ou adhérence de } Ax) \quad .$$

2° Montrer que si T est une contraction, I − T est monotone.

3° Montrer que A est monotone si, et seulement si,

$$|x - y| \leqslant |x - y + \lambda (u - v)|$$

quels que soient le réel positif λ et les éléments x, y, u, v vérifiant $u \in Ax$, $v \in Ay$.

4° On suppose A monotone. Montrer que l'équation $y \in (I + \lambda A)x$ admet, pour y appartenant à $R(I + \lambda A)$, $\lambda \geqslant 0$, une solution x unique et que $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction. (La multi-application $I + \lambda A$ a pour domaine D(A) et $(I + \lambda A)x = \{ x + \lambda u, \ u \in Ax \}$).

1° Soit φ une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$; on note $\partial\varphi$ la multi-application de $\mathbf{R}$ définie par

$$y \in \partial\varphi(x) \Leftrightarrow \forall \xi \in \mathbf{R} \quad \varphi(\xi) \geqslant \varphi(x) + (y, \xi - x) \quad .$$

Montrer que $\partial\varphi$ est monotone.

2° Soit f une fonction numérique croissante sur $\mathbf{R}$, on pose

$$f(x^-) = \sup_{y < x} f(y) \quad , \quad f(x^+) = \inf_{y > x} f(y) \quad .$$

Montrer que :

a. la multi-application B de $\mathbf{R}$ définie par $Bx = [f(x^-), f(x^+)]$ est monotone et qu'il n'existe pas de multi-application monotone C de $\mathbf{R}$ vérifiant : $C \neq B$; $\forall x \in \mathbf{R}$, $Bx \subset Cx$;

b. la relation $\varphi(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds$ définit une fonction φ vérifiant $\partial\varphi = B$.

III

Soient A une multi-application de $\mathbf{R}$ monotone et x un élément de D(A). Une fonction u dérivable sur $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$ est une solution du problème II si elle vérifie sur $\mathbf{R}^+$ les relations

$$u(t) \in D(A) \quad ; \quad -u'(t) \in Au(t);$$

elle sera solution du problème Π_x si elle vérifie de plus $u(0) = x$.

1° Soient u et v deux solutions du problème II.

Montrer que $|u(t) - v(t)|$ est une fonction décroissante de t, $t \in \mathbf{R}^+$.

2° Soit r la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $r(t) = u(t + h)$, $h \geqslant 0$, où u est une solution de II. Montrer que r est une solution de $\Pi_{u(h)}$.

En déduire que $|u'(t)|$ est une fonction décroissante de t.

3° Soient u une solution du problème II, t et s deux réels vérifiant $t \geqslant s \geqslant 0$.

Montrer que, quel que soit l'élément y de $Au(s)$, on a

$$|u(t) - u(s)| \leqslant |y|\, |t - s| \quad .$$

En déduire la relation $|u'(s)| = \|Au(s)\|$ et, si u est solution de Π_x, l'inégalité $|u'(t)| \leqslant \|Ax\|$.

IV

Pour n entier et t réel, positifs, on pose $\theta_n(t) = [(n-t)^2 + t]^{\frac{1}{2}}$.

1° Démontrer l'inégalité

$$\theta_{n-1}(t) \leqslant \theta_n(t) \left[1 + \frac{1-2n+2t}{2[\theta_n(t)]^2}\right] .$$

2° Soit $\{\Phi_n\}$ une suite de fonctions positives et continues sur $[0, +\infty]$ vérifiant

$$\Phi_0(t) \leqslant t \quad ; \quad \Phi_n(t) \leqslant ne^{-t} + \int_0^t e^{s-t}\,\Phi_{n-1}(s)\,ds .$$

Montrer que $\Phi_n(t) \leqslant \theta_n(t)$.

V

On considère le problème Π_x dans le cas particulier où $A = I - T$, T étant une contraction vérifiant $D(T) = [-1, +1]$, $R(T) \subset D(T)$.

1° Montrer que u est une solution de Π_x si, et seulement si, elle est solution continue de l'équation intégrale

2° On considère la suite $\{u_n\}$ de fonctions définies sur $\mathbf{R}^+$ par

$$u_0(t) = x \quad , \quad |x| \leqslant 1 \quad , \quad u_n(t) = e^{-t}x + \int_0^t e^{s-t}\,T\left(u_{n-1}(s)\right)\,ds \quad .$$

Montrer que $u_n(t)$ appartient à $D(T)$ et que la suite u_n a une limite u solution de Π_x $\quad \left(u(t) = \lim_{n \to +\infty} u_n(t)\right)$.

3° En appliquant l'inégalité du IV-2° à

$$\Phi_n(t) = |\,u(t) - T^n x\,|\;|\,(I-T)x\,|^{-1} ,$$

montrer que, si u est solution de Π_x,

$$|\,u(n) - T^n x\,| \leqslant \sqrt{n}\,|\,x - Tx\,| .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail